総実代数体における新谷不変量について (解析数論およびその周辺の諸問題)

AUTHOR(S):

山本, 修司

CITATION:

山本, 修司. 総実代数体における新谷不変量について (解析数論およびその周辺の諸問題). 数理解析研究所講究録 2010, 1710: 23-28

ISSUE DATE:

2010-08

URL:

http://hdl.handle.net/2433/170202

数理解析研究所講究録
第 1710 巻 2010 年 23-28

総実代数体における新谷不変量について*

山本 修司 (Shuji YAMAMOTO)†

総実代数体における新谷の類不変量について論文 [6] で得られた結果を，Stark 単数との関係を中心にして説明する．証明など，詳しいことは [6] を参照されたい．

本稿を通して，以下の記号を用いる：

F ：n (≥ 2) 次の総実代数体.

$\mathfrak{f}$ ：F の整数環 O_F の非自明なイデアル.

$Cl(\mathfrak{f})$ ：$\mathfrak{f}$ を法とする狭義射類群 (narrow ray class group).

$\zeta(s,\mathfrak{C})$ ：射類 $\mathfrak{C}$ に付随する部分ゼータ関数：

$$\zeta(s,\mathfrak{C})=\sum_{\mathfrak{a}\subset O_F,[\mathfrak{a}]=\mathfrak{C}}N(\mathfrak{a})^{-s}.$$

$L(s,\chi)$ ：Dirichlet 指標 χ に付随する L 関数：

$$L(s,\chi)=\sum_{\mathfrak{a}\subset O_F}\chi(\mathfrak{a})N(\mathfrak{a})^{-s}=\sum_{\mathfrak{C}}\chi(\mathfrak{C})\zeta(s,\mathfrak{C}).$$

1 Stark 単数と新谷不変量

まず Stark 予想のステートメントを，我々の目的に関係する場合に限って復習する．

F の n 個の実素点を $\mathfrak{p}_\infty^{(1)},\ldots,\mathfrak{p}_\infty^{(n)}$ と書き，$\mathfrak{p}_\infty^{(i)}$ に対応する埋め込み $F\longrightarrow\mathbb{R}$ を $x\longmapsto x^{(i)}$ で表す．また各 $i=1,\ldots,n$ に対し，$\mu_i\in O_F$ を

$$\mu_i\equiv 1 \mod \mathfrak{f},\quad \mu_i^{(i)}<0,\quad \mu_i^{(j)}>0\ (j\neq i)$$

---

*This work was supported by Grant-in-Aid for JSPS Fellows 21・5093

†JSPS Research Fellow. Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro, Tokyo, 153-8914 Japan.

を満たすようにとり，単項イデアル (μ_i) が属する $Cl(\mathfrak{f})$ の元を同じ μ_i で表す（これはもとの $\mu_i \in O_F$ のとり方によらない）．

次に $H_i = Cl(\mathfrak{f})/\{1, \mu_i\}$ とおき，この群に対応する F 上の類体を K_i とする．また F の実素点 $\mathfrak{p}_\infty^{(i)}$ の上にある K_i の素点（これも実素点である）を1つ選び，対応する埋め込み $K_i \longrightarrow \mathbb{R}$ をやはり $x \longmapsto x^{(i)}$ で表す．さらに，相互写像 $H_i \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(K_i/F)$ を ρ で表す．

以上の記号の下で，拡大 K_i/F に対する Stark 予想は次のように述べられる：

予想 1.1 (Stark [4], Tate [5])
単数 $\varepsilon_i \in O_{K_i}^\times$ が存在して，任意の $\mathfrak{C} \in H_i$ に対して $\left(\varepsilon_i^{\rho(\mathfrak{C})}\right)^{(i)} > 0$ かつ

$$\zeta'(0, \mathfrak{C}) = -\frac{1}{2} \log\left(\varepsilon_i^{\rho(\mathfrak{C})}\right)^{(i)} \tag{1.1}$$

を満たす．この ε_i を Stark 単数と呼ぶ．

上の主張は $H_i = Cl(\mathfrak{f})/\{1, \mu_i\}$ の元に関するものであるが，これを $Cl(\mathfrak{f})$ の元に対して言い直すと次のようになる．いま $\mathfrak{C} \in Cl(\mathfrak{f})$ に対し，標準全射 $Cl(\mathfrak{f}) \longrightarrow H_i$ による像を $\overline{\mathfrak{C}}$ とおくと，

$$\zeta(s, \overline{\mathfrak{C}}) = \begin{cases} \zeta(s, \mathfrak{C}) + \zeta(s, \mu_i \mathfrak{C}) & (Cl(\mathfrak{f}) \text{ において } \mu_i \neq 1 \text{ のとき}), \\ \zeta(s, \mathfrak{C}) & (Cl(\mathfrak{f}) \text{ において } \mu_i = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ．したがって

$$\zeta'(0, \mathfrak{C}) + \zeta'(0, \mu_i \mathfrak{C}) = -\log Y_i(\mathfrak{C}) \tag{1.2}$$

によって実数 $Y_i(\mathfrak{C}) > 0$ を定義すれば，(1.1) は

$$Y_i(\mathfrak{C}) = \begin{cases} \sqrt{\left(\varepsilon_i^{\rho(\overline{\mathfrak{C}})}\right)^{(i)}} & (Cl(\mathfrak{f}) \text{ において } \mu_i \neq 1 \text{ のとき}), \\ \left(\varepsilon_i^{\rho(\overline{\mathfrak{C}})}\right)^{(i)} & (Cl(\mathfrak{f}) \text{ において } \mu_i = 1 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{1.3}$$

と書き直される．

さて，$Y_i(\mathfrak{C})$ の定義 (1.2) を L 関数を使って言い換えると，

$$L'(0, \chi) = -\frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{C} \in Cl(\mathfrak{f})} \chi(\mathfrak{C}) \log Y_i(\mathfrak{C}) \tag{1.4}$$

となる（ここで χ は $\chi(\mu_i) = 1$ を満たす $Cl(\mathfrak{f})$ の指標）．

補題 1.2 $\mathfrak{C} \in Cl(\mathfrak{f})$ および $i, j = 1, \ldots, n$ に対して

$$Y_i(\mu_j \mathfrak{C}) = \begin{cases} Y_i(\mathfrak{C}) & (i = j), \\ Y_i(\mathfrak{C})^{-1} & (i \neq j). \end{cases} \tag{1.5}$$

証明　$i=j$ の場合は定義 (1.2) から明らかである．一方 $i \neq j$ の場合，L 関数の関数等式における Γ 因子の形から，次のことが分かる：$\chi(\mu_i)=\chi(\mu_j)=1$ なる任意の指標 $\chi\colon Cl(\mathfrak{f}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ に対し，$L'(0,\chi)=0$ が成り立つ．この事実と式 (1.4)，および指標の直交性より $\log Y_i(\mathfrak{C})+\log Y_i(\mu_j\mathfrak{C})=0$ が導かれる．∎

次に，射類 $\mathfrak{C} \in Cl(\mathfrak{f})$ の新谷不変量 $X(\mathfrak{C})$ を次式で定義する：

$$X(\mathfrak{C})=\exp\bigl\{-\zeta'(0,\mathfrak{C})+(-1)^n\zeta'(0,\mu_1\cdots\mu_n\mathfrak{C})\bigr\}.$$

注意 1.3 この不変量は，はじめ Shintani [3] において $n=2$ の場合に考察された．

補題 1.2 より，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\log Y_i(\mathfrak{C}) &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\log Y_i(\mu_1\cdots\mu_{i-1}\mathfrak{C}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\bigl\{-\zeta'(0,\mu_1\cdots\mu_{i-1}\mathfrak{C})-\zeta'(0,\mu_1\cdots\mu_i\mathfrak{C})\bigr\} \\ &= -\zeta'(0,\mathfrak{C})+(-1)^n\zeta'(0,\mu_1\cdots\mu_n\mathfrak{C})\end{aligned}$$

である．したがって

$$X(\mathfrak{C})=Y_1(\mathfrak{C})\cdots Y_n(\mathfrak{C}) \tag{1.6}$$

となる．予想 1.1 を仮定すれば，等式 (1.3) が成り立つから，新谷不変量 $X(\mathfrak{C})$ は Stark の単数 $(\varepsilon_i^{\rho(\mathfrak{C})})^{(i)}$（またはその平方根）の積に分解することが分かる．

2　新谷不変量の解析的表示

ここでは，新谷不変量 $X(\mathfrak{C})$ の多重正弦関数による表示について説明する．

まず記号を幾つか導入する．$F \longrightarrow \mathbb{R}^n;\ x \longmapsto (x^{(1)},\ldots,x^{(n)})$ によって $F \subset \mathbb{R}^n$ とみなす．また一般に $a \in \mathbb{R}^n$ の座標を $a^{(1)},\ldots,a^{(n)}$ で表すこととし，これらの座標が全て正（すなわち a が総正）であることを $a \gg 0$ と表す．さらに部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して $A_+=\{a \in A \mid a \gg 0\}$ とおく．

さて，$\mathbb{R}^n$ の第 1 象限 $\mathbb{R}^n_+$ には総正単数群 $(O_F^\times)_+$ が自然に作用しているが，ここではその部分群 $E_\mathfrak{f}=\bigl\{\varepsilon \in (O_F^\times)_+ \bigm| \varepsilon \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}\bigr\}$ の作用を考え，その基本領域として次のような錐分割 Φ をとる：

(1) Φ は $\mathbb{R}^n_+$ の（有理）錐からなる有限集合である．ここでいう錐とは，$\mathbb{R}$ 上 1 次独立な元 $\omega_1,\ldots,\omega_d \in F_+$ によって

$$\sigma=\{x_1\omega_1+\cdots+x_d\omega_d \mid x_1,\ldots,x_d>0\}$$

と表される部分集合 $\sigma \subset \mathbb{R}_+^n$ のことをいう．なおこのとき，σ の次元 d を $d(\sigma)$ で表す．

(2) Φ の元は互いに交わらず，それらの和集合は $\mathbb{R}_+^n$ への $E_{\mathfrak{f}}$ の作用に関する基本領域をなす：

$$\mathbb{R}_+^n = \coprod_{\varepsilon \in E_{\mathfrak{f}}} \coprod_{\sigma \in \Phi} \varepsilon\sigma.$$

注意 2.1 このような分割の存在や，それを部分ゼータ関数に応用するというアイデアは Shintani [2, Proposition 4] による．

いま射類 $\mathfrak{C} \in Cl(\mathfrak{f})$ が与えられたとして，その類に属する整イデアル $\mathfrak{a}$ を1つ選ぶ．また $z \in F_+$ を任意にとり，$\mathfrak{b} = z\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}$ とおく．さらに各 $\sigma \in \Phi$ に対し，その生成系 $\underline{\omega}(\sigma) = (\omega_1, \ldots, \omega_d)$ $(d = d(\sigma))$ を $\mathfrak{b}$ の元から選び，

$$P_\sigma = \{x_1\omega_1 + \cdots + x_d\omega_d \mid 0 < x_1, \ldots, x_d \leq 1\}$$

とおく．

定理 2.2 ([6, Theorem 4.6])
新谷不変量 $X(\mathfrak{C})$ は

$$X(\mathfrak{C}) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{\sigma \in \Phi} \prod_{w \in P_\sigma \cap (z+\mathfrak{b})} \mathcal{S}_{d(\sigma)}\big(w^{(i)}, \underline{\omega}(\sigma)^{(i)}\big)$$

なる表示を持つ．ここで $\mathcal{S}_d$ は d 重正弦関数（Kurokawa-Koyama [1] 参照）であり，$\underline{\omega}(\sigma)^{(i)} = (\omega_1^{(i)}, \ldots, \omega_{d(\sigma)}^{(i)})$ は上で取った σ の生成系の第 i 成分を並べたベクトルを表す．

定理 2.2 の表示は，多重正弦関数という特殊函数の値で表すという意味で「解析的表示」であるが，錐分割などのデータを含むという意味で「組合せ的表示」でもある．幾何学では，de Rham の定理や Cheeger-Müller の定理など，解析的な量と組合せ的な量が一致するということがしばしばあるが，$X(\mathfrak{C})$ が両方の性格を同時に含む表示を持つ，という事実は何らかの幾何学的なバックグラウンドにおいて説明できるのだろうか？

3 2つの分解

式 (1.6) の分解 $X(\mathfrak{C}) = Y_1(\mathfrak{C}) \cdots Y_n(\mathfrak{C})$ は，新谷不変量と Stark 単数との関係を明らかにするものであった．一方定理 2.2 により，

$$X_i(\mathfrak{C}) = \prod_{\sigma \in \Phi} \prod_{w \in P_\sigma \cap (z+\mathfrak{b})} \mathcal{S}_{d(\sigma)}\big(w^{(i)}, \underline{\omega}(\sigma)^{(i)}\big)$$

とおけば，これは $X(\mathfrak{C})$ における「実素点 $\mathfrak{p}_\infty^{(i)}$ からの寄与」とでもいうべきものであって，

$$X(\mathfrak{C}) = X_1(\mathfrak{C}) \cdots X_n(\mathfrak{C}) \tag{3.1}$$

と書くことができる．しかるに次の定理により，(1.6) と (3.1) の 2 通りの分解が一致することが分かる：

定理 3.1 ([6, Theorem 5.9, Theorem 6.1])
$X_i(\mathfrak{C})$ は Φ や $\mathfrak{a}$, z, $\underline{\omega}(\sigma)$ などの選択によらない不変量であり，

$$X_i(\mu_j\mathfrak{C}) = \begin{cases} X_i(\mathfrak{C}) & (i = j), \\ X_i(\mathfrak{C})^{-1} & (i \neq j) \end{cases} \tag{3.2}$$

を満たす．

系 3.2 $X_i(\mathfrak{C}) = Y_i(\mathfrak{C})$ が成り立つ．

証明 (3.1) と (3.2) から $X_i(\mathfrak{C})^2 = X(\mathfrak{C})X(\mu_i\mathfrak{C})$ が導かれる．同様に (1.6) と (1.5) から $Y_i(\mathfrak{C})^2 = X(\mathfrak{C})X(\mu_i\mathfrak{C})$ となるので，両者は等しい． ∎

注意 3.3 (1) 式 (1.3) より，予想 1.1 が正しければ

$$X_i(\mathfrak{C}) = \begin{cases} \sqrt{\left(\varepsilon_i^{\rho(\overline{\mathfrak{C}})}\right)^{(i)}} & (Cl(\mathfrak{f}) \text{ において } \mu_i \neq 1 \text{ のとき}), \\ \left(\varepsilon_i^{\rho(\overline{\mathfrak{C}})}\right)^{(i)} & (Cl(\mathfrak{f}) \text{ において } \mu_i = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる（なお [6, Theorem 2.2, Remark 2.3] では，誤って「常に $X_i(\mathfrak{C}) = \left(\varepsilon_i^{\rho(\overline{\mathfrak{C}})}\right)^{(i)}$」と主張しているので注意されたい）．

(2) 非自明かつ原始的な Dirichlet 指標 $\chi\colon\ Cl(\mathfrak{f}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して，$L(s,\chi)$ の $s=0$ における位数は $\chi(\mu_i) = 1$ となる $i = 1, \ldots, n$ の個数（これを r とおく）と一致する．いま $r = 1$ として，$\chi(\mu_i) = 1$ なる唯一の添え字 i をとると，式 (1.4) より

$$L'(0,\chi) = -\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{C}\in Cl(\mathfrak{f})} \chi(\mathfrak{C}) \log X_i(\mathfrak{C})$$

が成り立つ．すなわち $L(s,\chi)$ の $s=0$ における 0 でない最初の係数 $L'(0,\chi)$ が，i 番目の実素点の寄与 $X_i(\mathfrak{C})$ のみを用いて表されていることになる．これより，

> r 階導関数の値 $L^{(r)}(0,\chi)$ は，$\chi(\mu_i) = 1$ なる i に対応する r 個の実素点の寄与を用いて表されるか？

という問題が自然に考えられる．$r=0$ の場合は，Klingen-Siegel の定理より $L(0,\chi)$ は代数的なので，超越的な寄与がないという意味で上記の主張が成り立っていると考えてよいだろう．一方 $r\geq 2$ の場合については，このようなタイプの主張は今のところ示されていないようである．

参考文献

[1] Kurokawa, N., Koyama, S., Multiple sine functions, *Forum Math.*, **15** (2003), 839–876.

[2] Shintani, T., On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **23** (1976), 393–417.

[3] Shintani, T., On certain ray class invariants of real quadratic fields, *J. Math. Soc. Japan*, **30** (1978), 139–167.

[4] Stark, H., L-functions at $s=1$. IV. First derivatives at $s=0$, *Adv. Math.*, **35** (1980), 197–235.

[5] Tate, J., On Stark's conjectures on the behavior of $L(s,\chi)$ at $s=0$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **28** (1981), 963–978.

[6] Yamamoto, S., On Shintani's ray class invariant for totally real number fields, *Math. Ann.*, **346** (2010), 449–476.